STAT0041: Stochastic Calculus

Lecture 7 - Properties of Brownian Motion

Lecturer: Weichen Zhao — Fall 2025

Key concepts:

- 布朗运动的鞅性；
- 布朗运动的轨道性质。

7.1 鞅性

考虑布朗运动$(B_t)_{t\geq 0}$的自然σ代数流

$$\mathscr{F}_t \triangleq \sigma(\{B_s : 0 \leq s \leq t\}).$$

Proposition 7.1 设(B_t)为一个一维标准布朗运动，则下面随机过程为$\mathscr{F}_t$-鞅

(1) B_t;

(2) $B_t^2 - t$;

(3) $\exp(\lambda B_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t)$, $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$.

Proof:

(1) 适应性由布朗运动定义可知，由于$B_t \sim N(0,t)$，所以B_t是可积的，下面证明鞅性：

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[B_{t+s}|\mathscr{F}_t] &= \mathbb{E}[B_t + (B_{t+s} - B_t)|\mathscr{F}_t] \\
&= \mathbb{E}[B_t|\mathscr{F}_t] + \mathbb{E}[B_{t+s} - B_t|\mathscr{F}_t] \\
&= B_t + \mathbb{E}[B_{t+s} - B_t] \\
&= B_t.
\end{aligned}$$

故B_t为一个鞅；

(2) 由于$B_t \sim N(0,t)$, 那么

$$\mathbb{E}[B_t^2] = Var(B_t) + (\mathbb{E}[B_t])^2 = t + 0 = t.$$

即$B_t^2 - t$是可积的，下证鞅性：

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[B_{t+s}^2 - (t+s)|\mathscr{F}_t] \\
&= \mathbb{E}[(B_t + (B_{t+s} - B_t))^2 - (t+s)|\mathscr{F}_t] \\
&= \mathbb{E}[B_t^2 + 2B_t(B_{t+s} - B_t) + (B_{t+s} - B_t)^2 - (t+s)|\mathscr{F}_t] \\
&= \mathbb{E}[B_t^2|\mathscr{F}_t] + \mathbb{E}[2B_t(B_{t+s} - B_t)|\mathscr{F}_t] + \mathbb{E}[(B_{t+s} - B_t)^2|\mathscr{F}_t] - (t+s) \\
&= B_t^2 + 2B_t\mathbb{E}[(B_{t+s} - B_t)|\mathscr{F}_t] + s - t - s \\
&= B_t^2 - t.
\end{aligned}$$

故$B_t^2 - t$为一个鞅；

(3) 设 X 是一个随机变量，它的矩母函数(Moment Generating Function, MGF)定义为：

$$M_X(t) \triangleq \mathbb{E}[e^{tX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x)dx$$

对于一维标准布朗运动 $B_t \sim N(0,t)$，其矩母函数为

$$M_{B_t}(\lambda) = \mathbb{E}[e^{\lambda B_t}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x - \frac{x^2}{2t}} dx$$

由于

$$\lambda x - \frac{x^2}{2t} = -\frac{1}{2t}\left(x^2 - 2t\lambda x + \lambda^2 t\right) + \frac{\lambda^2 t}{2} = -\frac{1}{2t}(x - \lambda t)^2 + \frac{\lambda^2 t}{2}$$

所以

$$M_{B_t}(\lambda) = e^{\frac{\lambda^2 t}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\lambda t)^2}{2t}} dx = e^{\frac{\lambda^2 t}{2}}$$

所以 $\exp(\lambda B_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t)$ 的期望存在，下证鞅性：

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}[e^{\lambda B_{t+s}-\frac{\lambda^2}{2}(t+s)}|\mathscr{F}_t]\\
&=\mathbb{E}[e^{\lambda(B_t+(B_{t+s}-B_t))-\frac{\lambda^2}{2}(t+s)}|\mathscr{F}_t]\\
&=\mathbb{E}[e^{\lambda B_t-\frac{\lambda^2}{2}t}e^{\lambda(B_{t+s}-B_t)-\frac{\lambda^2}{2}s}|\mathscr{F}_t]\\
&=e^{\lambda B_t-\frac{\lambda^2}{2}t}\mathbb{E}[e^{\lambda(B_{t+s}-B_t)-\frac{\lambda^2}{2}s}|\mathscr{F}_t]\\
&=e^{\lambda B_t-\frac{\lambda^2}{2}t}\mathbb{E}[e^{\lambda(B_{t+s}-B_t)}e^{-\frac{\lambda^2}{2}s}]\\
&=e^{\lambda B_t-\frac{\lambda^2}{2}t}\mathbb{E}[e^{\lambda W_s}]e^{-\frac{\lambda^2}{2}s} \qquad \text{其中令 } W_s\sim N(0,s)\\
&=e^{\lambda B_t-\frac{\lambda^2}{2}t}.
\end{aligned}
$$

故 $\exp(\lambda B_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t)$ 为一个鞅 ■

注. 我们称 $\exp(\lambda B_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t)$ 为布朗运动的指数鞅。

7.2 样本轨道性质

随机过程可以看成是一个随机函数$t \mapsto B(t,\omega)$，即它的样本轨道。这些随机函数的性质即是随机过程的样本轨道性质。

由布朗运动的定义我们知道它的轨道是几乎处处连续的，但却是几乎处处不可微的。

Theorem 7.2 布朗运动的几乎所有样本轨道是处处不可微的。

Proof: 由于布朗运动是平移不变的，所以我们只需要考虑时间区间$[0,1]$，另一方面，由于每一维是独立的，我们不妨只考虑一维的情形。

可微函数的一个结论：若 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 在 $x\in[0,1]$ 可微，那么存在 $C>0$，$\delta>0$，使得对于 $s\in[x-\delta,x+\delta]$，满足

$$|f(x)-f(s)|\leq C|x-s|.$$

考虑事件：

$$A \triangleq \{\omega \in \Omega \mid \exists\, t \in [0,1]\ s.t.\ B(t,\omega)\ \text{在}\ t\ \text{处可微}\}.$$

对任意给定 $\omega_0 \in A$，存在$C(\omega_0) > 0$，$\delta(\omega_0) > 0$，对于$s \in [t-\delta, t+\delta]$，有

$$|B(t,\omega_0) - B(s,\omega_0)| \leq C(\omega_0)|t-s|.$$

对上述 $\delta(\omega_0)$，取 $n_0 \in \mathbb{N}$ 满足 $\frac{4}{n_0} < \delta(\omega_0)$，再令 $k_0 \in \mathbb{N}$ 使得 $\frac{k_0-1}{n_0} \leq t \leq \frac{k_0}{n_0}$，那么对 $i = k_0-1, k_0, k_0+1, k_0+2$，

$$|\frac{i}{n_0} - t| < \delta(\omega_0)$$

于是

$$\begin{aligned}
&|B(\frac{i+1}{n_0},\omega_0) - B(\frac{i}{n_0},\omega_0)| \\
\leq &|B(\frac{i+1}{n_0},\omega_0) - B(t,\omega_0)| + |B(\frac{i}{n_0},\omega_0) - B(t,\omega_0)| \\
\leq &C(\omega_0)|\frac{i}{n_0} - t| + C(\omega_0)|\frac{i+1}{n_0} - t| \leq 2C(\omega_0)\frac{4}{n_0} = \frac{8C(\omega_0)}{n_0}
\end{aligned}$$

定义

$$M_{(k,n)}(\omega) \triangleq \max\{|B(\frac{k}{n},\omega) - B(\frac{k-1}{n},\omega)|, |B(\frac{k+1}{n},\omega) - B(\frac{k}{n},\omega)|, |B(\frac{k+1}{n},\omega) - B(\frac{k+1}{n},\omega)|\}.$$

$$M_n(\omega) \triangleq \min\{M_{(1,n)}(\omega), \ldots, M_{(n,n)(\omega)}\}.$$

那么 $M_{(k_0,n_0)}(\omega_0) \leq \frac{8C(\omega_0)}{n_0}$，按照定义也有 $M_{n_0}(\omega_0) \leq \frac{8C(\omega_0)}{n_0}$。

对任意$n \geq n_0$，可以类似找到 $k \in \mathbb{N}$，使得对任意给定 $\omega_0 \in A$

$$M_n(\omega_0) \leq \frac{8C(\omega_0)}{n}$$

记事件

$$A_n^{(m)} \triangleq \{\omega \in \Omega | M_n(\omega) \leq \frac{8m}{n}\}, \quad m \in \mathbb{N}^+$$

由于对任意给定 $\omega_0 \in A$，可以找到正整数 $m(\omega_0) \geq C(\omega_0)$，那么

$$\begin{aligned}
A \subset &\bigcup_{m=1}^{\infty}\{\omega \in \Omega : \exists n_0, \forall n \geqslant n_0, \omega \in A_n^{(m)}\} = \bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n_0=1}^{\infty}\bigcap_{n=n_0}^{\infty} A_n^{(m)} \\
\triangleq &\bigcup_{m=1}^{\infty}\liminf_n A_n^{(m)}.
\end{aligned}$$

想要证明$P(A)=0$，只需证明 $P(\liminf_n A_n^{(m)})=0$

由于 $B(\frac{k}{n},\omega)-B(\frac{k-1}{n},\omega), B(\frac{k+1}{n},\omega)-B(\frac{k}{n},\omega), B(\frac{k+2}{n},\omega)-B(\frac{k+1}{n},\omega)=\frac{1}{\sqrt{n}}B_1\sim N(0,\frac{1}{n})$ 相互独立，所以

$$P(\{M_{(k,n)}(\omega)\leq\frac{8m}{n}\})=\left(P(\{|B_1|\leq\frac{8m}{\sqrt{n}}\})\right)^3\leq(\frac{16m}{\sqrt{n}})^3$$

那么

$$\begin{aligned}P(A_n^{(m)})&=P(\{M_n\leq\frac{8m}{n}\})\leq nP\left(\{M_{(k,n)}\leq\frac{8m}{n}\}\right)\\&\leq n(\frac{16m}{\sqrt{n}})^3=\frac{16^3m^3}{\sqrt{n}}\end{aligned}$$

由Fatou引理

$$P(\liminf_n A_n^{(m)})\leq\liminf_n P(A_n^{(m)})\leq\lim_n P(A_n^{(m)})\leq\lim_n\frac{16^3m^3}{\sqrt{n}}=0$$

那么$P(A)=0$，这即是一维布朗运动样本轨道在$[0,1]$几乎处处不可微。 ■

我们接下来研究布朗运动轨道的变差，这是定义随机积分的关键。

Definition 7.3 (变差) *连续函数 $f:[0,t]\to\mathbb{R}$ 的 p 次变差 (Variation) 定义为*

$$V_f^{(p)}(t)\triangleq\sup\sum_{j=1}^{k}|f(t_j)-f(t_{j-1})|^p,$$

其中上确界是对于所有 $k\in\mathbb{N}$ 及划分 $0=t_0\leqslant t_1\leqslant\cdots\leqslant t_{k-1}\leqslant t_k=t$ 取。

注. $\mathbb{R}$中有界闭集上的连续函数有以下关系：

连续可微 $\subset$ Lipschitz连续 $\subset$ 绝对连续 $\subset$ 连续+有界变差 $\subset$ (几乎处处)可微

Corollary 7.4 *由于布朗运动是几乎处处不可微，且连续的，所以它不是有界变差的。*

虽然布朗运动一阶变差无界，但它的二次变差在 L^2 意义下为 t.

Theorem 7.5 设(B_t)为一维标准布朗运动，且

$$\Delta:\ 0=t_0<t_1<\cdots<t_{n-1}<t_n=T$$

为区间$[0,T]$的划分, 定义

$$\delta \triangleq \sup_{1\leqslant i\leqslant n}\{t_i-t_{i-1}\}$$

那么当 $\delta\to 0$时，

$$\mathbb{E}\left|\sum_{i=0}^{n-1}\left|B_{t_{i+1}}-B_{t_i}\right|^2-T\right|^2\to 0.$$

Proof: 注意到

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1}\left|B_{t_{i+1}}-B_{t_i}\right|^2-T\right|^2=\left|\sum_{i=0}^{n}\left(\left|B_{t_{i+1}}-B_{t_i}\right|^2-\Delta t_i\right)\right|^2.$$

其中$\Delta t_i\triangleq t_{i+1}-t_i$，对等式两边同时取期望，RHS为

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left|\sum_{i=0}^{n-1}\left(\left|B_{t_{i+1}}-B_{t_i}\right|^2-\Delta t_i\right)\right|^2\\
=&\mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{n-1}\left(\left|B_{t_{i+1}}-B_{t_i}\right|^2-\Delta t_i\right)^2\right]+2\mathbb{E}\left[\sum_{i<j}\left(\left|B_{t_{i+1}}-B_{t_i}\right|^2-\Delta t_i\right)\left(\left|B_{t_{j+1}}-B_{t_j}\right|^2-\Delta t_j\right)\right]\\
\triangleq& I_1+I_2
\end{aligned}$$

首先计算I_1, 事实上

$$\begin{aligned}
I_1&=\sum_{i=0}^{n-1}\mathbb{E}\left[\left(\left|B_{t_{i+1}}-B_{t_i}\right|^2-\Delta t_i\right)^2\right]\\
&=\sum_{i=0}^{n-1}\mathbb{E}\left[\left(B_{t_{i+1}}-B_{t_i}\right)^4+(\Delta t_i)^2-2\Delta t_i\left(B_{t_{i+1}}-B_{t_i}\right)^2\right]\\
&=\sum_{i=0}^{n-1}\left[\mathbb{E}\left[\left(B_{t_{i+1}}-B_{t_i}\right)^4\right]+(\Delta t_i)^2-2\Delta t_i\mathbb{E}\left[\left(B_{t_{i+1}}-B_{t_i}\right)^2\right]\right].
\end{aligned}$$

由于高斯分布$X\sim N(\mu,\sigma^2)$的矩母函数为

$$M_X(\lambda)=\mathbb{E}[e^{\lambda X}]=e^{\mu\lambda+\frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2}$$

对于$B_{t_{i+1}} - B_{t_i} \sim N(0, \Delta t_i)$，矩母函数为 $e^{\frac{1}{2}\Delta t_i \lambda^2}$, 在$\lambda = 0$处展开到 4 阶可得

$$\mathbb{E}\left[\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)^4\right] = 3\left(\Delta t_i\right)^2.$$

因此

$$I_1 = 2\sum_{i=0}^{n-1}\left(\Delta t_i\right)^2 \leq 2\delta T.$$

其次计算I_2, 我们有

$$\begin{aligned}
I_2 &= 2\sum_{i<j}\mathbb{E}\left[\left(\left|B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right|^2 - \Delta t_i\right)\left(\left|B_{t_{j+1}} - B_{t_j}\right|^2 - \Delta t_j\right)\right] \\
&= 2\sum_{i<j}\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\left(\left|B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right|^2 - \Delta t_i\right)\left(\left|B_{t_{j+1}} - B_{t_j}\right|^2 - \Delta t_j\right)|\mathscr{F}_{t_j}\right]\right] \\
&= 2\sum_{i<j}\mathbb{E}\left[\left(\left|B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right|^2 - \Delta t_i\right)\mathbb{E}\left[\left(\left|B_{t_{j+1}} - B_{t_j}\right|^2 - \Delta t_j\right)|\mathscr{F}_{t_j}\right]\right]
\end{aligned}$$

由布朗运动的的独立增量性及 Gauss 性，我们有

$$\mathbb{E}\left[\left(\left|B_{t_{j+1}} - B_{t_j}\right|^2 - \Delta t_j\right)|\mathscr{F}_{t_j}\right] = 0.$$

所以$I_2 = 0$, 因此

$$\lim_{\delta\to 0}\left[\sum_{i=0}^{n-1}\left|B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right|^2 - T\right]^2 = \lim_{\delta\to 0}(I_1 + I_2) = 0.$$

■

注. 结论在 almost surely 收敛意义下仍然成立，证明参考：Mörters Peter, and Yuval Peres. Brownian motion. Vol. 30. Cambridge University Press, 2010. Theorem 1.35.